1

16/12/2020

Ασκ. 5 φυλ. 4:

„$\Longleftarrow$" Έστω ότι $f_n \overset{ομ.}{\not\to} f$

Τότε, $\exists\, \varepsilon > 0$, τ.ω. $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$, με $n \geq n_0$

$\exists\, x_n \in X$, τ.ω. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$

Δηλ., $\exists\, \{x_n\} \subseteq X$, τ.ω. $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (1).

↳ παίρνοντας, εν ανάγκη κάποια υπακολουθία της $\{f_n\}$

- X συμπαγής $\Rightarrow \exists\, \{x_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$ και $x_0 \in X$, τ.ω. $x_{k_n} \to x_0$.

- f συνεχής $\Rightarrow f(x_{k_n}) \to f(x_0)$

Αν $f_{k_n}(x_{k_n}) \to f(x_0) \Rightarrow f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n}) \to 0$

άτοπο από την (1).

Άρα, $f_{k_n}(x_{k_n}) \not\to f(x_0)$.

- Θεωρούμε την ακολουθία $y_\nu = \begin{cases} x_{k_n}, & \text{αν } \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } \nu = k_n \\ x_0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Τότε, $y_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$, αλλά $f_{k_n}(y_{k_n}) \not\to f(x_0)$

$\Rightarrow f_n(y_n) \not\to f(x_0)$, άτοπο από υπόθεση.

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{ομοιομ.} f$. ☒

Εφαρμογή του κρ. ομοιομ. σύγκλισης του Weierstrass.

- Δυναμοσειρά (με κέντρο το 0) στον $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad , \; a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}.$$

Θεώρημα: Έστω $R = \sup\{|x| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ συγκλίνει}\}$, $R \in [0, \infty]$ (Ονομάσατε: R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς). Τότε, αν $R > 0$, $\exists\, s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ συνεχής, τ.ω.

(i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην s σε κάθε συμπαγές διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq (-R, R)$.

(ii) Αν $[\alpha, \beta] \subseteq (-R, R)$, τότε $s'(x) \overset{\text{ομ.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)'$, στο $[\alpha, \beta]$.

Ειδικότερα, $s'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)'$, $\forall x \in (-R, R)$.

(iii) Αν $[\alpha, \beta] \subseteq (-R, R)$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} s(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \int_{\alpha}^{\beta} x^k\, dx.$$

Απόδειξη: (i) Θέτουμε $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ (το n-οστό μερικό άθροισμα της δυναμοσειράς), $n \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x = x_0 \neq 0$. ③

Θ.δ.ο. συγκλίνει, $\forall x \in \mathbb{R}$, με $|x| < |x_0|$.

Πράγματι, αφού $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x_0^k$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$a_k x_0^k \to 0 \Rightarrow \{a_k x_0^k\}$ φραγμένη ακολουθία.

$\Rightarrow \exists\, c > 0$, τ.ω. $|a_k x_0^k| \leq c$, $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |a_k x^k| = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \cdot |a_k \cdot x_0^k|$$

$$\leq c \cdot \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$$ (γεωμετρική σειρά, που συγκλίνει, επειδή $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$)

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει.

- Έστω $x \in \mathbb{R}$, με $|x| < R$ $\xRightarrow[\text{του } R]{\text{ορισμός}}$ $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$, τ.ω. $|x| < |x_0| < R$ και $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x_0^k$ συγκλίνει. $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$, με $|x| < R$.

— ″ — — ″ — ,

- Θέτουμε $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$, $x \in (-R, R)$.
- Αρκεί νδο. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \overset{\text{ομ.}}{=} s(x)$, $\forall x \in [-a, a]$, όπου $0 < a < R$.

Έστω $\alpha' < x_0 < R \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_0^k$ συγκλίνει

$\xrightarrow[\text{πριν}]{\text{όπως}} \exists\, c > 0$, τ.ω. $|\alpha_k \cdot x_0^k| \leq c$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow |\alpha_k \cdot x^k| = |\alpha_k \cdot x_0^k \left(\frac{x}{x_0}\right)^k| \leq c \cdot \left|\frac{\alpha'}{x_0}\right|^k,$$

$\forall x \in [-\alpha', \alpha']$

και (όπως πριν, αφού $\left|\frac{\alpha'}{x_0}\right| < 1$)

$\sum_{k=0}^{\infty} c \left|\frac{\alpha'}{x_0}\right|^k$ συγκλίνει. $\xrightarrow[\text{Weierstrass}]{\text{κρ.}}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot x^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha', \alpha']$

$\xrightarrow{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \overset{κ.σ}{=} s(x)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $s(x)$.

Όμως, $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot x^k$ (συνεχής), $n \in \mathbb{N}$ $\xrightarrow[\text{στο } [-\alpha', \alpha']]{s_n \overset{ομ.}{\to} s}$

$s|_{[-\alpha', \alpha']}$ συνεχής $\xrightarrow[\substack{\text{αριθμός μεταξύ} \\ 0 \text{ και } R}]{\alpha' \text{ τυχόν}}$ s συνεχής. στο $(-R, R)$

(iii) $\int_a^\beta s(x)\,dx = \int_a^\beta \lim_n s_n(x)\,dx$ $\xrightarrow[\text{στο } [a,\beta]]{s_n \overset{ομ.}{\to} s}$

$$\lim_n \int_a^\beta s_n(x)\,dx = \lim_n \int_a^\beta \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k\,dx =$$

$$= \lim_{n} \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^B x^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^B x^k\,dx$$

(ii) Θ.δ.ο. η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$$ είναι τουλάχιστον

R. Αρκεί ν.δ.ο αν $|x| < |x_0| < R$ και $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ συγκλίνει, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$

συγκλίνει.

- Όπως πριν, $\exists c > 0$, τ.ω. $|a_k x_0^k| \leq c$, $\forall k$

$$\Longrightarrow |a_k \cdot x_0^{k-1}| \leq \frac{c}{x_0}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow |k \cdot a_k \cdot x_0^{k-1}| = k \cdot |a_k \cdot x_0^{k-1}| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}$$

$$\leq \frac{c}{|x_0|} \cdot k \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}$$

- Κριτήριο ρίζας:

$$\sqrt[k]{\frac{c}{|x_0|} \cdot k \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}} \longrightarrow \frac{|x|}{|x_0|} < 1 \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{ck}{|x_0|} \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}$$ συγκλίνει $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$$ συγκλίνει απόλυτα $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \cdot x^{k-1} \text{ συγκλίνει}$$

Άρα, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$ συγκλίνει, $\forall x \in (-R, R)$.

- Έστω $x \in [0, R)$ (ομοίως για $x \in (-R, 0)$).

Τότε, (ii) $\Longrightarrow \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot t^{k-1}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \int_0^x t^{k-1} dt$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a^k \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot x^k\right)'$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$ συνεχής στο $(-R, R)$ από το (i)

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k\right)'$$

Μένει νδο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \beta]$, όπου $[\alpha, \beta] \subseteq (-R, R)$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από το (i). ◪

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Από την απόδειξη προκύπτει ότι αν η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ είναι $R > 0$, τότε $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^x t^k dt$ και $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)'$ έχουν ακτίνα

σύγκλισης ακριβώς R.

2) Το ίδιο Θεώρημα (με προφανείς τροποποιήσεις) ισχύει και για δυναμοσειρές με κέντρο το $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k \quad (\text{απλώς θέτουμε } y = x - x_0).$$

Παραδείγματα:

1) Σειρά Taylor της e^x:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \text{ Τότε, } e^x \underset{=}{\overset{\kappa.\sigma.}{}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

- $e^x \underset{=}{\overset{\text{ομ.}}{}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ στο $[a, \beta]$, $\forall\, a < \beta$.
- Θ.δ.ο. δεν ισχύει $e^x \underset{=}{\overset{\text{ομ.}}{}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

Έστω ότι ισχύει $e^x \underset{=}{\overset{\text{ομ}}{}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Τότε, για $\varepsilon = 1$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$,

$$\Big| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \underbrace{e^x}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} \Big| < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq n_0, \ \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Big| < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq n_0 + 1, \ \frac{x^n}{n!} < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\xRightarrow{n=n_0+1} x<[(n_0+1)!]^{\frac{1}{n_0}}, \ \forall x \geq 0$, άτοπο. $\blacksquare$

2) Σειρά Taylor της Arctanx:

$$\operatorname{Arctan}x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt, \quad x\in\mathbb{R}.$$

- $\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1}{1-(-t^2)} \overset{\text{γεωμ. σειρά}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}, \quad |t|<1$

$(R=1)$.

$$\Longrightarrow \operatorname{Arctan}x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \forall x\in(-1,1)$$

- Για $x=1$, αποκλίνει, αλλά για $x=-1$ συγκλίνει (Κρ. Leibnitz).

(Η ακτίνα σύγκλισης όταν παραγωγίζει ή ολοκληρώνει κάποιος όρο προς όρο είναι η ίδια, αλλά δεν έχουμε καμία πληροφορία για τα άκρα).

Ισοσυνέχεια

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων στον μ.χ. (X,d) και έστω $x \in X$. Λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισοσυνεχής στο x, αν:

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, τ.ω. $\forall y \in X$, με $d(x,y)<\delta$, να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, $\underline{\forall f \in \mathcal{A}}$.

(Δηλαδή f συνεχής στο x, $\forall f \in \mathcal{A}$ και επιπλέον αν $\varepsilon>0$, τότε μπορούμε να πάρουμε το δ να είναι ίδιο για όλες τις f, $f \in \mathcal{A}$).

Λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι ισοσυνεχής, αν είναι ισοσυνεχής στο x, $\forall x \in X$.

- Αν $\mathcal{A}$ μονοσύνολο, τότε η έννοια της ισοσυνέχειας ταυτίζεται με την έννοια της συνέχειας.

<u>Θεώρημα</u>: (Arzela-Ascoli) Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ. και $A \subseteq C(X)$. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) $\mathcal{A}$ συμπαγές υποσύνολο του $(C(X), D)$

(ii) $\mathcal{A}$ κλειστό, φραγμένο στο $(C(X), D)$ και ισοσυνεχές

Απόδ: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Αρκεί νδο το $\mathcal{A}$ είναι ισοσυνεχές.

- $\mathcal{A}$ συμπαγές και $\bigcup_{f\in\mathcal{A}} B(f,\frac{\varepsilon}{3}) \supseteq \mathcal{A} \Rightarrow$ Αν $\varepsilon>0$,

τότε: $\exists\, f_1,\dots,f_n \in \mathcal{A}$, τ.ω. $\underbrace{\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i,\frac{\varepsilon}{3})}_{1}$

- Έστω $x\in X$ και $\varepsilon>0$. Έστω $i\in\{1,\dots,n\}$.
f_i συνεχής $\Longrightarrow \exists\, \delta_i>0$, τ.ω. $\forall y\in X$,
με $d(y,x)<\delta_i$ να ισχύει
$|f_i(x)-f_i(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 2

- Έστω $f\in\mathcal{A} \overset{1}{\Longrightarrow} \exists\, i\in\{1,\dots,n\}$, τ.ω.

$f\in B(f_i,\varepsilon/2) \Longrightarrow D(f,f_i)<\frac{\varepsilon}{2}$

- Θέτουμε $\delta := \min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$. Έχουμε:
$\forall y\in X$, με $d(x,y)<\delta$,

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_i(y)| + |f_i(x)-f_i(y)| + |f_i(y)-f(y)|$$

$$< D(f,f_i) + \frac{\varepsilon}{3} + D(f,f_i)$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

f τυχούσα συνάρτηση από το $\mathcal{A}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}$ ισοσυνεχής στο X $\xRightarrow{X \text{ τυχόν σημείο του } X}$ $\mathcal{A}$ ισοσυνεχής.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Αρκεί νδο κάθε ακολουθία από το $\mathcal{A}$ έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία. Γιατί, τότε, κάθε ακολουθία από το $\mathcal{A}$ θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία ως προς την D και το όριό της θα ανήκει στο $\mathcal{A}$ (αφού $\mathcal{A}$ κλειστό).

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία από το $\mathcal{A}$.

- Η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη (γιατί $\mathcal{A}$ φραγμένο στον $(C(X), D)$, δηλαδή $\exists M > 0$, τ.ω. $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$.
- $\{f_n\}$ ισοσυνεχής $\Longrightarrow$ Για $k \in \mathbb{N}$, για $x \in X$, $\exists \delta(k,x) > 0$, τ.ω. $\forall y \in X$, με $d(y,x) < \delta(k,x)$, να ισχύει: $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{1}{k}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Επειδή, $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta(k,x))$ και (X,d) συμπαγής

$\Longrightarrow \exists F_k \subseteq X$, F_k πεπερασμένο, τ.ω.

$$X = \bigcup_{y \in F_k} B(y, \delta(k,y)) \quad , k \in \mathbb{N}.$$

$\Longrightarrow \exists F_k \subseteq X$, F_k πεπερασμένο, τ.ω.

$$X = \bigcup_{y \in F_k} B(y, \delta(k,y))$$

και $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{1}{k}$, $\forall y \in F_k, \forall x \in \underbrace{B(y, \delta(k,y))}_{=: V_{k,y}}$

- Θέτουμε $F := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, οπότε το F είναι

το πολύ αριθμήσιμο, δηλ. $F = \{x_1, x_2, \dots\}$,

για κάποια $\{x_n\} \subseteq X$.

(Διαγώνιο επιχείρημα του Cantor)

Λήμμα: Έστω $\{f_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένη

κ' $x_1, x_2, \dots \in X$. Τότε, $\exists$ υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της

$\{f_n\}$, τ.ω. η πραγματική ακολουθία $\{f_{k_n}(x_\nu)\}$

να συγκλίνει $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Απόδειξη του θεωρήματος:

Θέτουμε $h_n := f_{k_n}$. Αρκεί νδο. η $\{h_n\}$

είναι ομοιόμορφα Cauchy.

• Επειδή F_K πεπερασμένο και $\{h_n(y)\}$ συγκλίνει $\forall y \in F_K$

$\xrightarrow[\forall y \in F_K]{\{h_n(y)\}\ \text{Cauchy}}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq n_0$,

$$|h_n(y) - h_m(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y \in F_K.$$

• Έστω $x \in X$. Επειδή $X = \bigcup_{y \in F_K} V_{K,y}$

$\exists y \in F_K$, τ.ω. $|h_n(y) - h_n(x)| < \frac{1}{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\xrightarrow[K:\ \frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{3}]{\text{Παίρνουμε}}$ $|h_n(y) - h_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\forall m, n \geq n_0$, $|h_m(x) - h_n(x)| \leq$

$$|h_m(x) - h_m(y)| + |h_m(y) - h_n(y)| + |h_n(y) - h_n(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \xrightarrow[\text{τυχόν}]{x \in X}$$

$\{h_n\}$ ομ. Cauchy $\Rightarrow$ $\{h_n\}$ συγκλίνει.

$$\{h_n\} = \{f_{K_n}\}$$

$\boxtimes$